14 -Дәріс

<u>Тақырыбы</u>**: Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері. Функция графигінің ойыс, дөңес аралықтары. Иілу нүктелері.**

Функциялардың кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндері

$[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз f функциясының ең үлкен (ең кіші) мәнін табу керек болсын. Оның қандай да бір $x_0 \in [a,b]$ нүктесінде болатыны белгілі.

Ендеше тек келесі үш жағдай болуы мүмкін:

1) $x_0 = a$, 2) $x_0 = b$, 3) $x_0 \in (a,b,)$.

Егер $x_0 \in (a,b)$ болса, онда x_0 – локальді экстремум нүктесі екені түсінікті.

Егер $x_1, x_2, ..., x_m$ - күдікті нүктелер, онда

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(x_1), \dots, f(x_m)\}$$

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = \min\{f(a), f(b), f(x_1), \dots, f(x_m)\}. \qquad (3)$$

Функцияның дөңестігі. Иілу нүктелері

$f(x)$ функциясы J – аралығында берілсін.

Анықтама. *Егер* $f(x)$ – *тің графигінің кез келген* $A_1(x_1, f(x_1))$ *және* $A_2(x_2, f(x_2))$ *екі нүктесінің арасындағы доға осы доғаны керетін хордадан жоғары жатпаса, онда* $f(x)$ – *функциясы* J *аралығында* ***дөңестігі төмен бағытталған,*** *қысқаша,* ***ойыс функция*** *деп аталады.*

Егер $g(x) = -f(x)$ функциясы J аралығында ойыс болса, онда $f(x)$ – функциясы J аралығында **дөңестігі жоғары бағытталған,** қысқаша **дөңес функция** деп аталады. Әрине $f(x)$ ойыс функция болса, онда $-f(x)$ дөңес болады.

Теорема-1. Егер $f(x)$ функциясының J аралығында туындысы бар болса, онда $f(x)$ **ойыс (дөңес)** функция болу үшін $f'(x)$ функциясы аралығында **кемімейтін (өспейтін)** функция болуы қажетті және жеткілікті.

$f(x)$ функциясының J аралығында екінші ретті туындысы бар болса, онда $f'(x)$ функциясы J аралығында кемімейтін (өспейтін) болуы $x \in J$, $f''(x) \geq 0$ $\left(x \in \mathrm{I}, \quad f''(x) \leq 0\right)$ шарттарымен пара-пар болғандықтан, келесі теоремаға келеміз.

Теорема-2. Егер J аралығында $f(x)$ функциясының екінші ретті туындысы бар болса, онда $f(x)$ **ойыс (дөңес) функция** болуы үшін әрбір $x \in J$ үшін $f''(x) \geq 0$ $\left(f''(x) \leq 0\right)$ теңсіздігі орындалуы қажетті және жеткілікті.

Ойыс (дөңес) функциялардың геометриялық сипаты келесі теоремадан көрінеді.

Теорема. $f(x)$ (a,b) - аралығында дифференциалданатын функция болса, онда $f(x)$ - **ойыс (дөңес) функция** болуы үшін, оның графигі өзінің әрбір жанамасынан **төмен (жоғары) жатпауы** қажетті және жеткілікті.

Анықтама. $f(x)$ *функциясы* (a,b) *аралығында анықталған және үзіліссіз болсын. Егер* $x_0 \in (a,b)$ *нүктесінің белгілі бір оң және сол жақты маңайларында* $f(x)$ *функциясының дөңестігі қарама-қарсы бағытталған болса, онда* $(x_0, f(x_0))$ *нүктесі* $f(x)$ *- тің графигінің **иілу нүктесі** деп аталады.*

Теорема-3 (иілу нүктесінің қажетті шарты). (a,b) аралығында $f(x)$ дифференциалданатын, ал x_0 - нүктесінде екінші ретті туындысы $f''(x_0)$ бар функция болсын. Егер $(x_0, f(x_0))$ иілу нүктесі болса, онда $f''(x_0)=0$.

Теорема-4 (иілу нүктесінің жеткілікті шарты). Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің белгілі бір δ - маңайында үзіліссіз болып, $(x_0-\delta, x_0)$ аралығында туындысы бар және ол кемімейтін (өспейтін), $(x_0, x_0+\delta)$ аралығында туындысы бар және ол өспейтін (кемімейтін) болса, онда $(x_0, f(x_0))$ - иілу нүктесі.

Басқаша айтқанда, (x - өсу бағытында) x_0 - нүктесінен өткенде $f''(x)$ - екінші ретті туындының таңбасы өзгерсе, онда $(x_0, f(x_0))$ - иілу нүктесі болады.

Сонымен, функцияның иілу нүктелерін тек қана $f''(x_0)=0$ орындалатын немесе $f''(x)$ - болмайтын нүктелердің (ондай нүктелерді **функцияның екінші ретті күдікті нүктелері** деп те атайды) ішінен іздеу керек.